Revista Multidisciplinar Epistemología de las Ciencias

Volumen 1, Número 1, 2024

DE LA DIVISIBILIDAD A LAS TERNAS PITAGÓRICAS: TEOREMAS Y FORMAS DE GENERACIÓN

FROM DIVISIBILITY TO PYTHAGOREAN TRIALS: THEOREMS AND FORMS OF GENERATION

Alexander José Villarroel Salazar

Francisco Javier Villarroel Rosillo

Venezuela

De la divisibilidad a las ternas pitagóricas: teoremas y formas de generación

From divisibility to pythagorean trials: theorems and forms of generation

Alexander José Villarroel Salazar
alexvills76@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4628-1894
Investigador independiente
Venezuela.

Francisco Javier Villarroel Rosillo
fjvillr02@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9159-5892
Investigador independiente
Venezuela.

RESUMEN

Este artículo se plantea un enfoque innovador, desde la perspectiva de la divisibilidad hacia la generación de las ternas pitagóricas tomando los naturales desde n=3 y hasta infinito y sus características de divisibilidad en base a su paridad para usar a, sus divisores y cocientes en la generación de teoremas que permiten estudiar las posibles ternas pitagóricas que surgen de cada número n al considerarlo como un cateto menor fijo, además se introduce una fórmula general que permite estudiar cual es la diferencia que se desea tener entre el cateto mayor para hallar formas iterativas y fácilmente programables para obtener la generación de ternas pitagóricas.

Palabras claves: teorema de pitágoras, ternas pitagóricas, divisibilidad, números naturales.

ABSTRACT

This article proposes an innovative approach, from the perspective of divisibility towards the generation of Pythagorean triples, taking the naturals from n=3 and up to infinity and their divisibility characteristics based on their parity to use a, its divisors and quotients in the generation of theorems that allow studying the possible Pythagorean triples that arise from each number n when considering it as a fixed minor leg, in addition a general formula is introduced

that allows studying what difference is desired between the major leg to find iterative and easily programmable ways to obtain the generation of Pythagorean triples.

Keywords: pythagorean theorem, pythagorean triples, divisibility, natural numbers.

Recibido: 12 de diciembre 2024 | Modificación: 16 de diciembre 2024 | Aceptado: 29 de diciembre 2024

INTRODUCCIÓN

La generación de ternas pitagóricas aún es uno de los problemas que a pesar de tener más de 2500 años de descubierto, no ha sido explorado en forma efectiva y muchos matemáticos solo se limitan a compartir métodos inicialistas y archiconocidos como el de la tabla Plimpton, el uso de fracciones como lo hizo primeramente Pitágoras, el uso de estrategias como la de la tablilla Plimpton 322 (según Robson (2002, pag 105-119) y Mansfield(2017)), las de Diofanto, el método binomial de newton, por el cuadrado de una suma, por los números de Fibonacci y formas de trabajo de otros matemáticos, pero es poco lo que se ha avanzado en métodos novedosos que permitan poder generar ternas pitagóricas de una manera efectiva y sin el conjunto de limitaciones iniciales como las dudas de si es una terna que verdaderamente cumpla con el teorema de Pitágoras.

Martín (2023, p.1) afirmó que “el teorema de Pitágoras se encuentra en una tablilla babilónica 1.000 años anterior al matemático”, es decir, que aunque se atribuye a Pitágoras su proposición, formalización y demostración es de muy antigua data.

Alegría (2018) refiere en forma interesante ¡Quién le iba a decir a Pitágoras que su teorema, caso de que fuera realmente suyo, iba a entretener al colectivo matemático veinticinco siglos después! Refiriéndose a la gran relevancia que tiene el teorema desde su origen hasta la actualidad.

Es por ello que puede afirmarse que es uno de los teoremas más antiguos de la humanidad y de gran importancia en las matemáticas; al respecto González (2008) afirma que: "el Teorema de Pitágoras es de gran uso en el ámbito de las matemáticas y es fundamental en muchos de los teoremas geométricos que abarcan a los polígonos y los poliedros, y de gran uso en la Geometría Analítica y de la Trigonometría" (p. 104).

Sin embargo, a pesar del larguísimo periodo existencial del teorema de Pitágoras, muchos matemáticos se limitan a hacer repeticiones de métodos anteriores en los cuales basan sus artículos y otros hacen aportes incompletos a la posible generación de ternas o tripletes pitagóricos, ya que generan solo una parte muy pequeña de ellas sin hacer aportaciones significativas, que muestren originalidad o un abordaje novedoso de las ternas pitagóricas que genere nuevas formas de conceptualización sobre las mismas.

En este artículo luego de un minucioso proceso de revisión documental y análisis de la temática de las ternas se llega partiendo de los aspectos de divisibilidad en el conjunto N y la necesidad de innovar en la creación de teoremas, fórmulas y métodos de trabajo iterativos y fácilmente programables que permiten mejorar los procesos de cálculo de ternas pitagóricas y tener ideas muy clarificadoras de los procesos básicos de la obtención de los valores que satisfacen el teorema de Pitágoras en cada caso.

METODOLOGÍA

1. Preliminares

Para entender la forma en que se obtuvieron los resultados que ya se han indicado brevemente en el resumen y la introducción de este artículo se hace fundamental tratar una serie de aspectos que consideramos importantes en el proceso de revisión, estudio y cuestionamiento personal acerca de las triadas pitagóricas entre los cuales están los aspectos que se relacionan con divisibilidad, números naturales, ternas pitagóricas y teorema de Pitágoras**.**

1.1. Divisibilidad

Según Jiménez (2013, p.43) y Roldán (2024, p.6) al hablar de división define la misma diciendo por medio de la siguiente definición: “Sean a, b $\in$ Z, a$\neq$0. Diremos que “a” divide a “b”, si existe q $\in$ Z tal que b = aq.”

Notación: la expresión a divide a b, se denota por a|b, y cuando a no divide a b, se denota por a $\nmid$ b.

Sobre aspectos de división Zaldívar muestra el siguiente teorema:

Teorema 50

Sean a, b, c $\in$ Z

1. Si a|b entonces $(\forall c \in Z)(a|bc)$.
2. Si $(a|b \wedge b|c)$ entonces a|c.
3. Si $(a|b \wedge a|c)$ entonces $(\forall m, n \in Z)(a|(mb + nc))$.
4. Si $(a|b \wedge b|a)$ entonces $(a = b \vee a = -b)$.
5. Si $(a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0)$ entonces $a \leq b$.

Por su parte Zaldívar (2013) al hablar sobre divisibilidad expresa que:

Si a, b son dos enteros, con b ≠ 0, diremos que a divide a b, o que b es múltiplo de a, si existe otro entero q tal que b = aq. Usaremos la notación a |b para decir que a divide a b y también diremos que a es un divisor de b. Si a no divide a b lo denotaremos mediante a$\nmid$b. La relación de divisibilidad satisface las propiedades siguientes:

Proposición I.1.

1) a |a, para todo a ≠ 0.

2) Si a|b y b|c, entonces a |c.

3) 1|a, para todo a $\in$ Z.

4) a|0, para todo a ≠ 0.

5) Si $a|b$, entonces $a|br$, para cualquier $r \in Z$.

6) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a\ |b + c$.

7) Si $a|b$ y $a|c$, entonces a divide a cualquier combinación lineal de b y c, esto es, $a|br + cs$, para cualesquiera $r, s \in Z$.

8) Si $a|b$, entonces $a|-b$, $-a|b$, $-a|-b$, $|a|\,|\,|b|$.

9) Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = \pm b$.

10) Si $a|1$, entonces $a = \pm 1$.

11) Si $a|b$, entonces $|a| \leq |b|$.

Aquí la divisibilidad será utilizada en el contexto de las ternas pitagóricas estudiando solo la divisibilidad con los divisores de igual paridad que sean menores al dividendo que es el cateto menor de cada terna y dicha divisibilidad se estudiará considerando todos los números naturales mayores que 3 que es el mínimo valor para el cual se forma una terna no nula o trivial.

1.2. Números naturales

Todo número positivo desde el 1 hasta infinito pertenece a los números naturales. Según un estudio de Graña et al. (2009, p.21) “los números naturales son, denotados con N son los que comúnmente se usan para contar o enumerar, es decir, 1,2,3,4,5 y así sucesivamente y que ayudan a decir cuántos elementos posee un conjunto cualquiera”. Referente a este tema, Jiménez et al. (2004, p.1) y Pérez Porto y Merino (2009, p.1) al hablar en relación a los números naturales dicen lo siguiente: “Los números naturales pertenecen al conjunto de los números enteros positivos y se encuentran a la derecha del cero en la recta real. Además, conforman un conjunto infinito, ya que incluyen a todos los elementos de una sucesión 1, 2, 3, 4, 5, …). Dicho conjunto N es cerrado para las operaciones de suma y multiplicación, ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, el resultado siempre será un número natural.” La propiedad de cierre en cuanto a la suma y la multiplicación es aprovechada en cuanto a las modularidades de los números compuestos.

Según Ramos (2010) y m-Romero (2022) citando a Lane y Birkhoff (1999) señala que “Los números naturales son el conjunto de números con los que se puede contar la cantidad de elementos en un conjunto”. Este conjunto se denota con la letra N, así tenemos que el conjunto $\mathbb{N}$ está formado por los elementos:

Aquí se usarán los números naturales para generar ternas cuyas componentes son números naturales, es decir, que todos los elementos de una terna tendrán signo positivo y serán enteros.

1.3. Ternas pitagóricas

Fallas (2009, pp. 1-2) y Artacho (2022, p.1) señalan que “A una terna de números naturales (a, b, c) que satisface la ecuación:

$$a^2 + b^2 = c^2 \ (ecuación\ 1)$$

se llama terna pitagórica. Al correspondiente triángulo rectángulo de catetos con medidas $a\ y\ b$ e hipotenusa con medida c se le llama triángulo pitagórico”.

Por otra parte, Según Rodríguez (2014, p.5) y Arenzana (2019, p.1) “Una terna pitagórica es una triada ordenada de componentes (x, y, z) que son respectivamente lados de un triángulo rectángulo, en el cual x e y son catetos y z es la hipotenusa”. Es decir, se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2 \ (ecuación\ 2)}$$

Puede verse que la $\boldsymbol{(ecuación\ 1)}$ y la $\boldsymbol{(ecuación\ 2)}$ son la misma solamente que cambia la forma de llamar las componentes. En general, cada tres valores que cumplan con el teorema de Pitágoras son componentes de una terna pitagórica.

Vásquez y Vásquez (2016, p.62) plantean buscar ternas pitagóricas diciendo que “En esencia lo que se busca es que al sumar dos números cuadrados se obtenga otro cuadrado. Es decir, que la idea es tomar dos áreas que pueden juntarse y dar como resultado una tercera. El resultado es justamente un cuadrado más grande, que se construye ubicando el cuadrado (b^2), y ubicando el espacio del otro cuadrado (a^2), alrededor del primero, de forma que se construya un nuevo cuadrado, cuyo lado será el valor de c^2

Históricamente según Fallas (2009) "el origen de las ternas (hoy llamadas pitagóricas) comenzó antes de Pitágoras (Siglo VI a.C.) pues hay evidencias en base al hallazgo de tablas babilónicas que contienen algunas de estas ternas, quienes seguramente tenían algún método para generarlas. Además, hay rastros de su uso en Egipto para generar ángulos rectos, los cuales eran utilizados en agrimensura y construcciones". Es decir, que el cálculo de ternas pitagóricas representa un procedimiento matemático de muy antigua data.

Sin embargo, en criterio propio, permanecer anclado a los métodos antiguos sin repensar el problema de las ternas pitagóricas o del teorema de Pitágoras ha sido una limitante para el avance en la determinación eficiente y generalista de ternas.

Según Rodríguez (2014, p.6) en una terna pitagórica $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$, puede ocurrir que $a^2 - b^2$ puede ser primo o compuesto, $2ab$ es compuesto (es par) y $a^2 + b^2$ puede ser primo o compuesto. Ejemplos:

$(3, 4, 5) = (2^2 - 1^2, 4, 2^2 + 1^2)(3\ y\ 5\ son\ primos)$

$(15, 8, 17) = (4^2 - 1^2, 8, 4^2 + 1^2)(15\ es\ compuesto, 17\ es\ primo)$

$(23, 264, 265) = (12^2 - 11^2, 264, 11^2 + 12^2)(23\ es\ primo, 265\ es\ compuesto)$

$(63, 16, 65) = (8^2 - 1^2, 16, 8^2 + 1^2)(63\ y\ 65\ son\ compuestos)$

La forma de pensamiento expresada por el autor citado tiende a estudiar aspectos propios de las ternas, pero no lleva a un estudio de ternas en una forma total haciendo la consideración de todos los números naturales, lo cual le quita aspectos de generalización del comportamiento total de las ternas.

Algo interesante es que Muñoz (2019) presentó la que considera la terna más grande del mundo, pero se verá que con el teorema desarrollado en este artículo no hay limitantes para seguir hallando ternas infinitamente. Es decir, que esta es una simple pretensión matemática de este autor, ya que se pueden hallar millones de ternas pitagóricas más grandes que ella al ser un valor impar, ya que la terna por el autor reseñada toma el último primo de Mersenne descubierto en 2018.

Además, Overmars y otros (2019) plantearon su artículo "Un nuevo enfoque para generar todas las ternas pitagóricas" donde presentan estrategias de trabajo para ternas en base a parametrización.

Por otra parte, Vásquez y Vásquez (2016, p.61) citan a Roy & Sonia (2012), quienes proponen una generación de ternas pitagóricas basándose en la igualdad:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \quad (ecuación\ 3)$$

Según los autores citados previamente se conocen varios resultados que se limitan a esta condición, estableciendo que las ternas pitagóricas deben contener un número que resulte de sumar dos cuadrados, otro que resulte de restar esos dos cuadrados y un tercero que resulte del doble producto entre las raíces de esos números.

Sin embargo, esa relación o forma de trabajo ha sido históricamente imprecisa, ya que como dice lo anterior varios resultados se limitan a esa condición, pero hay muchos valores de ternas pitagóricas que no lo cumplen, por lo cual no constituye una forma de trabajo efectivo, mientras que no se precise el cumplimiento de los cuadrados según Pitágoras.

En este sentido, se ha avanzado en por lo menos percatarse de la generación de unas cuantas ternas partiendo del uso de 4 términos de la serie Fibonacci, pero es interesante la generación de ternas partiendo de todos los naturales. Por poner ejemplos de lo que se quiere decir, en el desarrollo de este artículo han surgido una serie de preguntas como las siguientes:

- ¿Hay una forma de generar ternas pitagóricas tomando cada par de números naturales desde el 1?

- ¿Se pueden hallar ternas pitagóricas tomando en cada caso 3 números consecutivos?
- ¿Se pueden generar ternas pitagóricas tomando cada natural como el valor del cateto menor?
- ¿A partir de la primera terna impar se pueden desarrollar métodos iterativos o programables que generen las demás ternas con primer elemento impar o el primer elemento par de manera que se consideren todas las ternas sin excepciones?
- ¿Se pueden diseñar fórmulas que determinen los valores de ternas con una cierta distancia y hacer una fórmula que generalice el comportamiento de las ternas pitagóricas?

Todas esas interrogantes y cuestionamiento son el basamento de los pensamientos que han dado origen a este artículo que rompe con los métodos tradicionales de búsqueda de ternas pitagóricas o de triadas que satisfagan o cumplan el teorema de Pitágoras y que serán esbozados en forma de teoremas, formulas y métodos iterativos en el desarrollo de los resultados del presente artículo.

1.4. Teorema de Pitágoras

Según Barrantes, Barrantes y otros (2018) "En todo triángulo que sea rectángulo (con un ángulo de 90°), se verifica que la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Esta proposición, indica el Teorema de Pitágoras, y corresponde a la proposición 47 del libro I de los Elementos de Euclides, la cual ha tenido un valor significativo en el avance matemático que ha sido logrado.

En efecto, en el área del álgebra y la geometría este es uno de los teoremas más famosos y uno de los fundamentales en la historia de las matemáticas, ya que tiene cerca de 2500 años, pero desde su descubrimiento es poco lo que se ha avanzado en la determinación efectiva de tripletes pitagóricos

Reyes, Rondero, Acosta, Campos y Torres (2017), hablan de la relación pitagórica

(RP) y el reduccionismo pedagógico que tiene implicaciones en la conceptualización reducida de este saber, es decir, pareciera que un número considerable de estudiantes de nivel universitario se quedan en aspectos elementales de este conocimiento.

Reyes, Rondero, Acosta, Campos y Torres (2018, p.59) afirman que “la RP debería conllevar a una red más amplia de conceptos y significados generados en relación al teorema de Pitágoras, pues el mismo tiene mucha versatilidad en las matemáticas, pues se trata en la teoría de números, el álgebra, la geometría, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo”.

A criterio personal esta tendencia de pensamiento que los autores llaman reduccionismo didáctico es asumido por muchas personas que estudian e investigan en matemáticas, quienes se han quedado mucho con la perspectiva planteada en la tablilla Plimpton 322 y poco se han interesado por buscar estrategias más profundas que simplifiquen desde una vez y para siempre los procesos de búsqueda de ternas pitagóricas.

En efecto, los matemáticos en la mayoría de los trabajos de investigación se centran en estudiar aspectos como las ternas que cumplen con una cierta diferencia entre sus dos primeros componentes, es decir, entre a y b (los catetos) o entre sus dos últimos términos, b y c es decir uno de los catetos y la hipotenusa, pero muy poco se han centrado en lograr mayores avances en la generación de ternas pitagóricas, sino que en los artículos que presentan se limitan a un estudio de posibles casos particulares.

Sobre el teorema de Pitagóras, las estudiantes Johnson y Jackson (2023) hacen una demostración trigonométrica de dicho teorema lo cual se creía imposible. Este logro ha sido reseñado por Sloman (2024) y también por Musso (2024) quien señala que las autoras añadieron 10 nuevas formas de demostrar dicho teorema, aumentando el gran número de demostraciones existentes sobre el teorema.

RESULTADOS

A continuación, se hace la presentación de los teoremas de generación de números primos, así como de fórmulas y métodos de iteración de ternas pitagóricas que procuran ser las respuestas a los cuestionamientos planteados en el inciso 2, 3.

2.1. Teorema 1: teoremas de ternas para n como cateto menor

Para cada número natural $n \geq 3$ es posible encontrar ternas pitagóricas para los divisores propios de igual paridad que n. Sea n el número, d un divisor propio y q el cociente que resulta de la división exacta entonces si se cumple que:

$$n = d * q \; tal \; que \; n \equiv 0 \; (mod \; d) \; (ecuación \; 4)$$

Entonces siempre independientemente de los valores de n, d y q que cumplan con la división exacta entonces:

$$\left(n, \frac{nq-d}{2}, \frac{nq+d}{2}\right) \; siempre \; es \; un \; terna \; pitagórica \quad (ecuación \; 5)$$

En este teorema, la divisibilidad entre divisores d de igual paridad que el valor de n cateto menor es la condición necesaria, ya que si no ocurre la divisibilidad de n entre el valor de d no se podrá obtener la terna pitagórica que se desea encontrar. En este sentido, encontrar la terna es la condición suficiente o la conclusión a la que se llega con la aplicación reiterativa del teorema.

Demostración

Basta comprobar que se cumple el teorema de Pitágoras. Para ello es preciso demostrar que la suma de los cuadrados de los dos primeros valores de la triada es igual al cuadrado del tercer término. Es decir, debe verificarse que:

$$n^2 + \left(\frac{nq-d}{2}\right)^2 = \left(\frac{nq+d}{2}\right)^2 \quad (ecuacion \; 6)$$

Al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad tenemos que:

$$n^2 + \left(\frac{nq-d}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{n^2q^2 - 2nqd + d^2}{4}$$

Pero resulta que $n = qd$

$$n^2 + \left(\frac{nq - d}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{n^2q^2 - 2n * n + d^2}{4}$$

$$n^2 + \left(\frac{nq - d}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{n^2q^2 - 2n^2 + d^2}{4}$$

$$n^2 + \left(\frac{nq - d}{2}\right)^2 = \frac{4n^2 + n^2q^2 - 2n^2 + d^2}{4}$$

$$\boldsymbol{n^2 + \left(\frac{nq - d}{2}\right)^2 = \frac{n^2q^2 + 2n^2 + d^2}{4}} \quad (6.1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la igualdad tenemos que:

$$\left(\frac{nq + d}{2}\right)^2 = \frac{n^2q^2 + 2nqd + d^2}{4}$$

Pero resulta que $n = qd$

$$\left(\frac{nq + d}{2}\right)^2 = \frac{n^2q^2 + 2n * n + d^2}{4}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{nq + d}{2}\right)^2 = \frac{n^2q^2 + 2n^2 + d^2}{4}} \quad (6.2)$$

Se puede ver que la 6.1 y la 6.2 son iguales por lo cual se verifica el teorema de Pitágoras, en el cumplimiento de la ecuación 6.

El teorema enunciado habla claramente de que la conformación de ternas pitagóricas solo es posible cuando se da la división exacta, pero es importante recalcar un conjunto de aspectos que son importantes tener en consideración:

1. en el caso de que n sea primo como 3, 5, 7 entre otros primos siempre se genera una única terna pitagórica, pero ello se debe a que 1 es el único divisor exacto del número primo que es inferior a su tercera parte, ya que es impar.
2. Si un número compuesto tiene n divisores de igual paridad (divisores pares si el número es par o divisores impares si el valor de n es impar) se generarán n ternas pitagóricas

con n como primer componente que corresponderá siempre al cateto menor excepto en la terna (4,3,5)

3. En el caso del valor de n par se consideran para la generación de ternas los divisores del número par hasta n/2 y en el caso de n impar y compuesto se consideran los divisores hasta n/3. De esa manera se generan todas las ternas posibles partiendo del hecho de hacer la consideración de que el valor de n sea el cateto menor

Pero el lector podría pensar que el cumplimiento de las ternas pitagóricas para valores de n como cateto menor es insuficiente, por lo cual a continuación se especifica el cumplimiento de las ternas para n par y n impar.

2.2. OBTENCIÓN DE TERNAS PARA PRIMER CATETO PAR

Sea n un número par cualquiera y k un número par que divida a n entonces siempre que $k \leq \frac{n}{2}$ entonces en cada caso que se obtenga un cociente q resulta una terna pitagórica:

Si n y k son números pares tales que k divide a n (k|n) es decir:

$$\boldsymbol{\frac{n}{k} = q \ con \ q \ par \ o \ impar \ (ecuación \ 7)}$$

Entonces en dicho caso siempre se cumple que:

$$\boldsymbol{\left(n, \frac{qn-k}{2}, \frac{qn+k}{2}\right) \ (ecuación \ 8)}$$

Aclaratoria: siempre n y k deben ser pares, ya que de ocurrir que k sea impar (lo cual es probable en divisores de números de pares, ya que admiten divisores pares e impares) ocurriría que siempre, ya sea que se obtenga q par o impar ocurriría que qn-k sería impar, con lo cual no sería divisible entre 2 y no sería un valor en los naturales, es decir, no cumpliría la ecuación diofántica de ternas pitagóricas. Sin embargo, los divisores k impares generan soluciones racionales, que satisfacen el teorema de Pitágoras, pero esa no es la idea sino encontrar siempre soluciones enteras.

Son valores que conforman una terna pitagórica

Cada valor “n” par genera siendo primer componente tantas ternas pitagóricas como divisores propios hasta n/2 existan.

En cada terna (a, b, c) a medida que aumentan los divisores los valores de b y de c tienden a disminuir en relación a los divisores más pequeños. Siempre se cumple que la distancia b-c=k.

Por ejemplo:

Tabla 1

Ternas pitagóricas a partir de 60 como cateto menor

N	k	Q	$\frac{qn-k}{2}$	$\frac{qn+k}{2}$	Terna (a, b, c)
60	2	30	$\frac{(30)(60)-2}{2}=899$	$\frac{(30)(60)+2}{2}=901$	(60, 899, 901)
60	4	15	$\frac{(15)(60)-4}{2}=448$	$\frac{(15)(60)+4}{2}=452$	(60, 448, 452)
60	6	10	$\frac{(10)(60)-6}{2}=297$	$\frac{(10)(60)+6}{2}=303$	(60, 297, 303)
60	10	6	$\frac{(6)(60)-10}{2}=175$	$\frac{(6)(60)+10}{2}=185$	(60, 175, 185)
60	12	5	$\frac{(5)(60)-12}{2}=144$	$\frac{(5)(60)+12}{2}=156$	(60, 144, 156)
60	20	3	$\frac{(3)(60)-20}{2}=80$	$\frac{(3)(60)+20}{2}=100$	(60, 80, 100)
60	30	2	$\frac{(2)(60)-30}{2}=45$	$\frac{(2)(60)+30}{2}=75$	(60, 45, 75)

Fuente: elaboración propia de los autores

Demostración:

Probamos que siempre la terna anterior es pitagórica. Tenemos que si

$$\frac{n}{k}=q \; entonces \; n=kq \; (ecuación\; 9)$$

Lo cual se cumpliría para cada divisor entonces si sustituimos en la terna anterior puede expresarse que:

$$\left(n, \frac{qn-k}{2}, \frac{qn+k}{2}\right) = \left(kq, \frac{kq^2-k}{2}, \frac{kq^2+k}{2}\right) (forma\ de\ terna\ 1)$$

Ahora debemos probar si es cierto que:

$$(kq)^2 + \left(\frac{kq^2-k}{2}\right)^2 = \left(\frac{kq^2+k}{2}\right)^2 \quad (ecuación\ 10)$$

Desarrollaremos primero el lado izquierdo de la igualdad anterior de lo cual se obtiene que:

$$(kq)^2 + \left(\frac{kq^2-k}{2}\right)^2 = k^2q^2 + \frac{k^2q^4 - 2k^2q^2 + k^2}{4}$$

$$(kq)^2 + \left(\frac{kq^2-k}{2}\right)^2 = \frac{4k^2q^2 + k^2q^4 - 2k^2q^2 + k^2}{4}$$

$$(kq)^2 + \left(\frac{kq^2-k}{2}\right)^2 = \frac{k^2q^4 + 2k^2q^2 + k^2}{4} \quad (10.a)$$

Al desarrollar el lado derecho de la igualdad se obtiene que:

$$\left(\frac{kq^2+k}{2}\right)^2 = \frac{k^2q^4 + 2k^2q^2 + k^2}{4} \quad (10.b)$$

Entonces de (10.a) y (10.b) se obtiene que siempre la ecuación 10 se cumple y entonces (forma de terna 1) cumple con generar una terna pitagórica para cada valor de $n, k\ y\ q$ que se pueda tener siempre y cuando se dé la relación de divisibilidad.

2.3. OBTENCIÓN DE TERNAS PARA PRIMER CATETO IMPAR

Si $n\ y\ k$ son números impares tales que $k\ divide\ a\ n\ (k|n)$, es decir:

$$\frac{n}{k} = 2q + 1\ donde\ q\ puede\ ser\ \ par\ o\ impar\ \ (ecuación\ 11)$$

Entonces en dicho caso siempre se cumple que:

$$(n, q(n+k), q(n+k)+k) \quad (ecuación\ 12)$$

Son valores que conforman una terna pitagórica

Cada valor "n" impar genera siendo primer componente tantas ternas pitagóricas como divisores propios hasta $\frac{n}{3}$ existan.

En cada terna (a, b, c) a medida que aumentan los divisores los valores de b y de c tienen a disminuir en relación a los divisores más pequeños. Siempre se cumple que la distancia $b - c = k$

15 tiene 3 divisores propios pares hasta $\frac{15}{3} = 5$ que son 1, 3, 5,

Tabla 2

Ternas pitagóricas a partir de 15 como cateto menor

n	K	2q+1	q	q(n + k)	q(n + k)+k	Terna (a, b, c)
15	1	15	7	7(15+1) =112	7(15+1) +1=113	(15,112,113)
15	3	5	2	2(15+3) =36	2(15+3) +3=39	(15, 36, 39)
15	5	3	1	1(15+5) =20	1(15+5) +5=25	(15,20,25)

Fuente: elaboración propia de los autores.

Demostración:

Probamos que siempre la terna anterior es pitagórica. Tenemos que si

$$\frac{n}{k} = 2q + 1 \; entonces \; n = 2kq + k \;\; (ecuación\ 13)$$

Lo cual se cumpliría para cada divisor entonces si sustituimos en la terna anterior puede expresarse que

$$(n, q(n + k), q(n + k) + k) = (2kq + k, q(2kq + k + k), q(2kq + k + k) + k)$$

O bien

$$(n, q(n + k), q(n + k) + k) = (2kq + k, 2kq^2 + 2kq, 2kq^2 + 2kq + k)$$

$$(forma\ de\ terna\ \ 2)$$

Ahora debemos probar si es cierto que:

$$(2kq + k)^2 + (2kq^2 + 2kq)^2 = (2kq^2 + 2kq + k)^2 \; (ecuación\ 14)$$

Desarrollaremos primero el lado izquierdo de la igualdad anterior de lo cual se obtiene que:

$$(2kq + k)^2 + (2kq^2 + 2kq)^2 = 4k^2q^2 + 2(2kq)(k) + k^2 + (2kq^2)^2 + 2(2kq^2)(2kq) + (2kq)^2$$

$$(2kq + q)^2 + (2kq^2 + q^2 + kq)^2 = 4k^2q^2 + 4k^2\text{q} + k^2 + 4k^2q^4 + 8k^2q^3 + 4k^2q^2$$

Ordenando en forma decreciente respecto a términos con q podemos escribir

$$(2kq+q)^2+(2kq^2+q^2+kq)^2=4k^2q^4+8k^2q^3+8k^2q^2+4k^2q+k^2$$

Aplicando agrupación de términos y sacando k^2 factor común resulta que:

$$(2kq+q)^2+(2kq^2+q^2+kq)^2=[4q^4+8q^3+8q^2+4q+1]k^2 \quad (14.a)$$

Al desarrollar el lado derecho de la igualdad se obtiene que:

$$(2kq^2+2kq+k)^2=4k^2q^4+2(2kq^2)(2kq+k)+(2kq+k)^2$$

$$(2kq^2+2kq+k)^2=4k^2q^4+8k^2q^3+4k^2q^2+4k^2q^2+4k^2q+k^2$$

De lo antes expresado tomando k^2 como factor común queda:

$$(2kq^2+2kq+k)^2=[4q^4+8q^3+8q^2+4q+1]k^2 \quad (14.b)$$

Entonces de (14.a) y (14.b) se obtiene que siempre se cumple la (ecuación 14) y entonces la (forma de terna 2) cumple con generar una terna pitagórica para cada valor de n, k y q que se pueda tener siempre y cuando se dé la relación de divisibilidad entre n y k ambos impares.

2.4. Forma alternativa del teorema 1.

Si se parte de (ecuación 4) entonces al despejar $q=\frac{n}{d}$ y sustituir en la (ecuación 5) queda la forma de terna

$$\left(\boldsymbol{n},\frac{\boldsymbol{nq-d}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{nq+d}}{\boldsymbol{2}}\right)=\left(\boldsymbol{n},\frac{\boldsymbol{n*\frac{n}{d}-d}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{n*\frac{n}{d}-d}}{\boldsymbol{2}}\right)=\left(\boldsymbol{n},\frac{\frac{\boldsymbol{n*n-d*d}}{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{2}},\frac{\frac{\boldsymbol{n*n+d*d}}{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{2}}\right)=\left(\boldsymbol{n},\frac{\boldsymbol{n^2-d^2}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{n^2+d^2}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

$(\boldsymbol{ecuación\ 15})$

Como puede verse la forma de la terna resultante en (ecuación 15) es archiconocida, pero no se pueden tomar valores arbitrarios como históricamente se ha hecho, por una especie de tanteo o prueba de ensayo y error, sino que los valores de $\boldsymbol{n\ y\ d}$ siempre están conectados siendo siempre $\boldsymbol{n>d}$ y siendo $\boldsymbol{d}$ un divisor propio de $\boldsymbol{n}$, por lo cual es pertinente partiendo de d buscar no cualquier divisor sino aquellos que tengan la misma paridad de $\boldsymbol{n}$, de manera que se asegure que siempre el valor del numerador es par y en consecuencia siempre de valores enteros al ser divisible entre 2, para que ciertamente en todo caso se pueda hallar la terna.

Sin embargo, la terna en la forma de la (ecuación 4) es más fácil de plantear, pues no requiere ni potencias cuadradas ni complejas operaciones de división, lo cual tiende a complicar mucho más los cálculos de las ternas cuando los números $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{d}$ crecen excesivamente. Esto contribuirá a poder desarrollar una forma de programar ternas pitagóricas basadas en la divisibilidad del valor de **n** usado sea este par o impar.

2.5. Ternas pitagóricas con todos los naturales

Según **Fallas (2009)** y **Arenzana (2019)** es famoso y conocido el uso de la sucesión de Fibonacci para generar algunas ternas pitagóricas. Eso me llevó a pensar en el hecho de generar ternas pitagóricas que se formaran a partir de todos los números naturales y que fuese mucho más completo que las ternas generadas con Fibonacci.

2.5.1. Ternas pitagóricas con un par de números consecutivos

Con los números naturales sin excepciones tomando cada par de ellos, es decir, 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4 y así sucesivamente es posible generar todas las ternas con primer componente impar y donde la distancia c-b=1 por medio de la terna de la forma:

$$(2a+1, 2ab, a^2+b^2) \quad (forma\ de\ terna\ 3)$$

Es decir, que se cumple para todo valor $a\ y\ b$ consecutivo que:

$$(2a+1)^2 + (2ab)^2 = (a^2+b^2)^2 \quad (ecuación\ 16)$$

Demostremos que la ecuación anterior se cumple para todo par $\boldsymbol{(a,b) = (n, n+1)}$. En efecto, basta comprobar que el lado izquierdo da el mismo resultado que el lado derecho al sustituir.

Entonces al desarrollar el lado izquierdo de (ecuación 16) nos queda:

$$\boldsymbol{(2a+1)^2 + (2ab)^2 = (2n+1)^2 + \big(2n(n+1)\big)^2}$$

$$\boldsymbol{(2a+1)^2 + (2ab)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + \big(2n^2 + 2n\big)^2}$$

$$\boldsymbol{(2a+1)^2 + (2ab)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^4 + 8n^3 + 4n^2}$$

$$\boldsymbol{(2a+1)^2 + (2ab)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \quad (16.a)}$$

Al desarrollar el lado derecho de (ecuación 16) nos queda:

$$(a^2+b^2)^2=(n^2+(n+1)^2)^2$$

$$(a^2+b^2)^2=(n^2+n^2+2n+1)^2$$

$$(a^2+b^2)^2=(2n^2+2n+1)^2$$

$$(a^2+b^2)^2=(2n^2)^2+2(2n^2)(2n+1)+(2n+1)^2$$

$$(a^2+b^2)^2=4n^4+(8n^3+4n^2)+4n^2+4n+1$$

$$(a^2+b^2)^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 \quad (16.b)$$

De (16.a) y su igualdad con $(16.b)$ es evidente que la $(ecuación\ 16)$ se cumple para todo par de la forma $(a,b)=\ (n,n+1)$ la forma de terna 3

2.5.2. Ternas pitagóricas con un trío de números consecutivos

Para valores de $a, b\ y\ c$ consecutivos desde $a=1$ y hasta infinito es posible formar ternas de la forma:

$$(2b, ac, bc-a) \quad (forma\ de\ terna\ 4)$$

Es decir, que se cumple para todo valor a, b y c consecutivos que:

$$(2b)^2+(ac)^2=(bc-a)^2 \quad (ecuación\ 17)$$

Demostremos que se cumple para toda triada. En efecto, basta comprobar que el lado izquierdo de la igualdad da el mismo resultado que el lado derecho al sustituir

$a=n, b=n+1\ y\ c=n+2.$

Entonces al desarrollar el lado izquierdo de $(ecuación\ 17)$ nos queda:

$$(2b)^2+(ac)^2=(2(n+1))^2+(n(n+2))^2$$

$$(2b)^2+(ac)^2=(2n+2)^2+(n^2+2n)^2$$

$$(2b)^2+(ac)^2=4n^2+8n+4+n^4+4n^3+4n^2$$

$$(2b)^2+(ac)^2=n^4+4n^3+8n^2+8n+4\ (17.a)$$

Al desarrollar el lado derecho de $(ecuación\ 17)$ nos queda:

$$(bc - a)^2 = \left((n+1)(n+2) - (n)\right)^2$$

$$(bc - a)^2 = \left(n^2 + 3n + 2 - n\right)^2$$

$$(bc - a)^2 = \left(n^2 + 2n + 2\right)^2$$

$$(bc - a)^2 = \left(n^2\right)^2 + 2\left(n^2\right)(n+2) + (n+2)^2$$

$$(bc - a)^2 = n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4$$

$$(bc - a)^2 = n^4 + 4n^3 + 8n^2 + 8n + 4 \ (17.b)$$

De $(17.a)$y su igualdad con $(17.b)$ es evidente que la (ecuación 17) se cumple para toda triada par de la forma $(a, b, c) = (n, n+1, n+2)$ y se verifica la forma de terna 4

En estos incisos el lector puede ver la posibilidad de generar ternas con primer componente impar con un par de valores consecutivos y de generar ternas con el primer componente par con un trío de valores consecutivos.

2.6. Fórmula generadora de ternas de distinta distancia entre b y c

Una de las cosas que es frecuentemente estudiada por los matemáticos es la generación de ternas (a, b, c) donde $b \ y \ c$ tienen un determinado valor y en este artículo se expondrá un teorema que permite generar todas las ternas desde $c - b = 1$ hasta cierto $c - b = d$.

2.6.1 Teorema 2:

Generación de ternas con cierta distancia $d = c - b$

Para generar las ternas con una cierta distancia $d = c - b$ **se aplica la expresión:**

$$2dn + d^2 = k^2 \ donde \begin{cases} si\ d\ es\ impar\ entonces\ k = d(2p+1)\ con\ p \geq 1 \\ si\ d\ es\ par \qquad entonces\ k = 2dp\ con\ p \geq 1 \end{cases}$$

Y la terna resultante en cada caso es $(k, n, n+d)$

$(Ecuación\ 18)$

2.6.2 Aplicabilidad del teorema 2

En este teorema se cambia el valor de d con el cual se quieran hallar ternas y se evalúa el valor de k inicial según la rama correspondiente para determinar el valor de n que cumple la primera ecuación, para cada terna siguiente se vuelve a incrementar k y se busca de nuevo el valor de n y así sucesivamente generando en cada caso la terna de la forma $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}+\boldsymbol{d})$ correspondiente.

Si se comienza en **k=1** se pueden generar **100** o más ternas con distancia **d=**1 y siguiendo el teorema se pueden generar **100** ternas para cada distancia desde **d=1** hasta **d=100.** Sin embargo, el teorema sigue funcionando para cualquier distancia d que se desee hallar ternas pitagóricas.

Demostración: es fácil ver a partir de $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}+\boldsymbol{d})$ que al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que

$$\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{n}^2=(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{d})^2$$

$$\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{n}^2+2\boldsymbol{d}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{d}^2$$

Y de lo anterior se mira el cumplimiento de la expresión en el teorema

$$2\boldsymbol{d}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^2=\boldsymbol{k}^2$$

Que se obtiene de simplificar los términos $\boldsymbol{n}^2$**,** hacer su cancelación en ambos miembros de la igualdad y girar la expresión resultante. Para ejemplificar el teorema anterior buscaremos las ternas para distancias donde da números pares.

Tabla 3

Ternas pitagóricas cuyas distancias b-c = 4f con f = 1, 2, 3, 4

Ternas de distancia C-B=4	Ternas de distancia C-B=8	Ternas de distancia C-B=12	Ternas de distancia C-B=16
(8,6,10)	(16, 12, 20)	(24,18,30)	(32, 24, 40)
(12,16,20)	(24, 32, 40)	(36,48,60)	(48, 64, 80)

(16,30,34)	(32,60,68)	(48,90,102)	(64,120,132)
(20,48,52)	(40,96,104)	(60,144,156)	(80,192,208)
(24,70,74)	(48,140,148)	(72,210,222)	(96,280,296)
(28, 96,100)	(56,192,200)	(84,288,300)	(112,384,400)

Fuente: elaboración propia de los autores

Tabla 4

Ternas pitagóricas cuyas distancias b-c = 4f-2 con f = 1, 2, 3, 4

Ternas de distancia C-B=2	Ternas de distancia C-B=6	Ternas de distancia C-B=10	Ternas de distancia C-B=14
(4,3,5)	(12, 9, 15)	(20,15, 25)	(28, 21,35)
(6,8,10)	(18, 24,30)	(30,40,50)	(42, 56, 70)
(8,15,17)	(24,45,51)	(40,75,85)	(56,105,119)
(10,24,26)	(30,72,78)	(50,120,130)	(70,168,182)
(12,35,37)	(36,105,111)	(60,175,185)	(84,245,259)
(14, 48,50)	(42,144,150)	(70,240,250)	(98,336,350)

Fuente: elaboración propia de los autores

Para hallar algunas de las ternas con distancias impares el lector puede desarrollar cálculos para ejercitar la funcionabilidad del teorema en la búsqueda de ternas pitagóricas. Como es visible el teorema 1 y el teorema 2 brindan características de iteratividad y fácil evaluación de ternas que pueden ser fácilmente programables en lenguaje C u otro lenguaje de programación

DISCUSIÓN

2.7. Ternas pitagóricas que escapan del primer teorema.

Históricamente el misterio de las ternas pitagóricas es fascinante y atrayente al punto que ha traído de cabeza a muchos matemáticos y aún 2500 años después de su descubrimiento es un interesante tema de estudio.

De desarrollar el teorema 1 que se basa en divisibilidad y comparar con ternas pitagóricas online se pudo avanzar en el conocimiento que se tiene acerca de las ternas pitagóricas y las posibilidades de formación tomando el valor de a en la terna (a, b, c) y llevando a cabo observaciones acerca de la separación entre b y c y los posibles divisores del valor inicial de la terna que siempre debe ser el cateto menor. Entonces al revisar información diversa se pudo observar que el tema de las ternas pitagóricas va mucho más allá del simple análisis y trasciende muchas formas de pensamiento

Lo dicho puede ser evidenciado al revisar tablas y hacer una detallada observación de las mismas, lo que conlleva a realizar nuevas consideraciones importantes a la hora de querer hallar todas las ternas para un cierto cateto menor

A continuación, se presenta una tabla y se hace un análisis respectivo de los valores contenidos en las ternas

Tabla 5

Algunas ternas pitagóricas primitivas

(3 , 4 , 5)	**(5, 12, 13)**	**(8, 15, 17)**	**(7, 24, 25)**
(9, 40, 41)	**(11, 60, 61)**	**(12, 35, 37)**	**(13, 84, 85)**
(16, 63, 65)	**(20, 21, 29)**	**(28, 45, 53)**	**(33, 56, 65)**
(36, 77, 85)	**(39, 80, 89)**	**(48, 55, 73)**	**(65, 72, 97)**

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Terna_pitagórica

El lector puede apreciar que en las dos primeras filas aparecen números cuya diferencia entre los valores b y c son de 1 y de 2 al comparar sus valores. Sin embargo, resulta sumamente interesante analizar las líneas 3 y 4 de la tabla anterior, ya que los primeros números entre ellos 20, 28, 33, 36, 39, 48 y 65 no son ningunos de ellos divisibles entre las distancias de b y c de cada triada, es decir que:

- **20, 28 y 36 no es divisible 8,**
- **33 y 39 no son divisibles entre 9,**
- **48 no es divisible entre 18 y**
- **65 no lo es entre 25.**

Lo anterior es muy significativo, pues permite optimizar el teorema 1, pues las diferencias que hay entre los valores b y c de las ternas **se relacionan con la multiplicidad de los divisores (sean pares o impares) o cuadrados de los mismos divisores siempre y cuando los nuevos productos, aunque no sean divisores directos del cateto menor sean valores menores n/2 si n es par o menor que n/3 si n es impar y productos de igual paridad que n, siendo siempre n el cateto menor**

Tabla 6

Lista de ternas Pitagóricas (triadas pitagóricas)

A	*B*	*C*	*A*	*C*	*B*	*A*	*B*	*C*
3	*4*	*5*	*44*	*117*	*125*	*120*	*209*	*241*
5	*12*	*13*	*44*	*483*	*485*	*132*	*475*	*493*
7	*24*	*25*	*48*	*55*	*73*	*133*	*156*	*205*
8	*15*	*17*	*51*	*140*	*149*	*135*	*352*	*377*
9	*40*	*41*	*52*	*165*	*173*	*136*	*273*	*305*
11	*60*	*61*	*57*	*176*	*185*	*140*	*171*	*221*
12	*35*	*37*	*60*	*91*	*109*	*145*	*408*	*433*

13	*84*	*85*	*60*	*221*	*229*	*152*	*345*	*377*
15	*112*	*113*	*65*	*72*	*97*	*155*	*468*	*493*
17	*144*	*145*	*68*	*285*	*293*	*160*	*231*	*281*
19	*180*	*181*	*69*	*260*	*269*	*161*	*240*	*289*
20	*21*	*29*	*75*	*308*	*317*	*168*	*425*	*457*
21	*220*	*221*	*76*	*357*	*365*	*175*	*288*	*337*
23	*264*	*265*	*84*	*187*	*206*	*180*	*299*	*349*
24	*143*	*145*	*84*	*437*	*445*	*189*	*340*	*389*
25	*312*	*313*	*85*	*132*	*157*	*203*	*396*	*445*
27	*364*	*365*	*87*	*416*	*425*	*204*	*253*	*325*
28	*45*	*53*	*88*	*105*	*137*	*207*	*224*	*305*
29	*420*	*421*	*93*	*476*	*485*	*225*	*272*	*353*
31	*480*	*481*	*95*	*168*	*193*	*228*	*325*	*397*
32	*255*	*257*	*96*	*247*	*265*	*252*	*275*	*373*
33	*56*	*65*	*104*	*153*	*185*	*261*	*380*	*461*
36	*77*	*85*	*105*	*208*	*233*	*280*	*351*	*449*
39	*80*	*89*	*115*	*252*	*277*	*297*	*304*	*425*
40	*399*	*401*	*119*	*120*	*169*	*319*	*360*	*481*

Fuente: https://www.vaxasoftware.com/doc_edu/mat/3pitafac.pdf

Además, en la tabla 6 puede apreciarse más claramente lo dicho para tabla 5 de la existencia de distancias que no son exactamente divisores del cateto menor n, sino una potencia de uno de ellos o un producto de dos o más de ellos siempre y cuando dicho producto, aunque no sea divisor exacto cumpla con tener la misma paridad del cateto menor.

CONCLUSIONES

Los dos teoremas presentados en este artículo son de gran importancia porque si bien el primero permite apreciar la dependencia de las ternas pitagóricas de la divisibilidad del cateto inicial y tener un criterio para generar ternas pitagóricas, el segundo permite encontrar ternas tomando en cuenta el aspecto de la distancia existente entre el segundo y tercer componente de cada triada, aspectos que permitirán generar las ternas con más eficiencia y sin la tendencia a la improvisación, el ensayo y error, entre otros aspectos característicos de métodos previos.

Por otra parte, los teoremas tienen una cualidad de generalización importante, pues permite el primero buscar todas las ternas para cada uno de los números naturales mayores que 2 al tomarlo como cateto inicial lo cual permite la generación ordenada de las ternas si se programa en cualquier lenguaje de cómputo como C, Pascal, XXXX , mientras que el segundo permite tomar una determinada distancia entre los dos componentes y generar cualquier cantidad de ternas pitagóricas donde los componentes tienen una cierta diferencia.

En cuanto a las ternas indicadas con las ecuaciones 4 y 18 que funcionan para un par o una triada de números naturales consecutivos se puede ver su utilidad para generar todas las ternas de distancia 1 o 2 respectivamente entre los dos últimos componentes de cada terna que surgen de su evaluación.

Además, es importantísima la última observación que es planteada en el inciso 3.7., ya que dicha forma de trabajo con potencias de un mismo divisor o productos de sus divisores (de igual o diferente paridad) del cateto menor que generen productos de igual paridad de n son generadores también de ternas pitagóricas, lo cual complementa excelentemente el trabajo con el primer teorema.

REFERENCIAS

Alegría, P. (2018). La solución matemática más larga de la historia. Recuperado de https://www.abc.es/ciencia/abci-solucion-matematica-mas-larga-historia-201804022054_noticia.html

Arenzana, V. (2019). Ternas pitagóricas. Recuperado de https://vicmat.com/ternas-pitagoricas/

Artacho, A. (2022). 2023 y las ternas pitagóricas. Recuperado de https://matematicascercanas.com/2022/12/28/2023-y-las-ternas-pitagoricas/

Barrantes López, M., Barrantes Masot, M., Zamora Rodríguez, J., & Mejía López, Á. (2018). El Teorema de Pitágoras, un problema abierto. *Revista Matemática de Educación Matemática Unión*, 54, 92–112. Recuperado de http://www.fisem.org/web/union y http://www.revistaunion.org/

Fallas, J. J. (2009). Ternas pitagóricas: métodos para generarlas y algunas curiosidades. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 9(2), 1–21. Cartago, Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica.

González, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: Una historia geométrica de 4000 años. *Sigma*, (32).

Graña, M., Jerónimo, G., & Ariel, P. (2009). Los números: De los naturales a los complejos (1.ª ed.). Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación de la Nación, Instituto Nacional de Educación Tecnológica. ISBN: 978-950-00-0748-1.

Jiménez, D. (2013). *Aritmética* (3.ª versión). Valparaíso, Chile: Universidad de Valparaíso.

Jiménez, R., Gordillo, E., & Rubiano, G. (2004). *Teoría de números para principiantes* (2.ª ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. ISBN: 958-701-372-7.

Johnson, C., & Jackson, N. (2023). An impossible proof of Pythagoras. *AMS*. Recuperado el 18 de marzo de 2023 de https://meetings.ams.org/

Lane, S. M., & Birkhoff, G. (1999). *Algebra* (Vol. 330). American Mathematical Society: Chelsea Publishing Company.

Mansfield, D. & Wildberger, N. J. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086017300691

Martín, A. (2023). El teorema de Pitágoras está en una tabla babilónica 1.000 años anterior al nacimiento de Pitágoras.

Muñoz, R. (2019). La terna pitagórica entera más grande de la actualidad. Recuperado de https://www.academia.edu/38777167/

Musso, M. (2024). Estas dos estudiantes revelaron diez nuevas formas de explicar el teorema de Pitágoras. Recuperado de https://es.wired.com/articulos/estas-dos-estudiantes-revelaron-diez-nuevas-formas-de-explicar-el-teorema-de-pitagoras

Overmars, A., Ntogramatzidis, L., & Venkatraman, S. (2019). Un nuevo enfoque para generar todas las ternas pitagóricas. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/331777611

Pérez Porto, J., & Merino, M. (2009). Definición de números naturales. Recuperado de https://definicion.de/números-naturales/

Pina-Romero, S. (2022). Los números naturales. Recuperado de https://www.todamateria.com/numeros-naturales/

Ramos, F. (2010). *Aritmética: Teoría y práctica*. (1.ª ed.). Lima, Perú: Empresa Editora Macro. ISBN: 978-612-4034.

Reyes, A., Rondero, C., Acosta, J., Campos, M., & Torres, A. (2017). Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del teorema de Pitágoras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 968–983.

Reyes, A., Rondero, C., Acosta, J., Campos, M., & Torres, A. (2018). Un acercamiento a la relación pitagórica a través del cálculo de ternas. *European Scientific Journal*, 14(6). ISSN: 1857-7881.

Robson, E. (2002). Words and pictures: New light on Plimpton 322. *The American Mathematical Monthly*, 109(2), 105–120. https://doi.org/10.1080/00029890.2002.11919845

Rodríguez-Roselló, M. (2014). La naturaleza trans-pitagórica de los números primos. Recuperado de https://vixra.org/pdf/1407.0014v2.pdf

Roldán, A. (2024). Teoría de la divisibilidad. Recuperado de https://www.academia.edu/13840762/

Roy, T., & Sonia, F. (2012). A direct method to generate Pythagorean triples and its generalization to Pythagorean quadruples and n-tuples. Recuperado de https://www.semanticscholar.org/

Sloman, L. (2024). 2 high school students prove Pythagorean theorem. Here's what that means. *Scientific American*. Recuperado el 7 de junio de 2024.

Vásquez, M., & Vásquez, M. (2016). Generando números de Pitágoras. Recuperado de edison-timbe-maskana-7106.pdf

Villatoro, F. (2017). El significado matemático de la tablilla babilónica Plimpton 322. *La Ciencia de la Mula Francis*. Recuperado de https://francis.naukas.com/2017/09/07/el-significado-matematico-de-la-tablilla-babilonica-plimpton-322/

Villarroel, A., & Villarroel, F. (2023). Del test de Chika a un criterio general de divisibilidad entre cualquier número primo o compuesto: Características y consecuencias. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 23(2). Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/

Zaldívar, F. (2012). *Introducción a la teoría de números*. México: FCE. ISBN: 978-607-16-0738-61.