REVISTA MULTIDISCIPLINAR EPISTEMOLOGÍA DE LAS CIENCIAS

Volumen 3, Número 1
Enero-Marzo 2026

Edición Trimestral

CROSSREF PREFIX DOI: 10.71112

ISSN: 3061-7812, www.omniscens.com

Revista Multidisciplinar Epistemología de las Ciencias

Volumen 3, Número 1
enero-marzo 2026

Publicación trimestral
Hecho en México

La Revista Multidisciplinar Epistemología de las Ciencias acepta publicaciones de cualquier área del conocimiento, promoviendo una plataforma inclusiva para la discusión y análisis de los fundamentos epistemológicos en diversas disciplinas. La revista invita a investigadores y profesionales de campos como las ciencias naturales, sociales, humanísticas, tecnológicas y de la salud, entre otros, a contribuir con artículos originales, revisiones, estudios de caso y ensayos teóricos. Con su enfoque multidisciplinario, busca fomentar el diálogo y la reflexión sobre las metodologías, teorías y prácticas que sustentan el avance del conocimiento científico en todas las áreas.

Contacto principal: admin@omniscens.com

9773061781003

Cintillo legal

Revista Multidisciplinar Epistemología de las Ciencias Vol. 3, Núm. 1, enero-marzo 2026, es una publicación trimestral editada por el Dr. Moises Ake Uc, C. 51 #221 x 16B , Las Brisas, Mérida, Yucatán, México, C.P. 97144 , Tel. 9993556027, Web: https://www.omniscens.com, admin@omniscens.com, Editor responsable: Dr. Moises Ake Uc. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2024-121717181700-102, ISSN: 3061-7812, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor (INDAUTOR). Responsable de la última actualización de este número, Dr. Moises Ake Uc, fecha de última modificación, 1 enero 2026.

Revista Multidisciplinar Epistemología de las Ciencias

Volumen 3, Número 1, 2026, enero-marzo

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

MODELO VMEEA: MARCO INTEGRAL PARA LA ENSEÑANZA EFECTIVA DE LAS MATEMÁTICAS

VMEEA MODEL: A COMPREHENSIVE FRAMEWORK FOR THE EFFECTIVE TEACHING OF MATHEMATICS

Edwin Rivera Rivera

Puerto Rico

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

Modelo VMEEA: marco integral para la enseñanza efectiva de las Matemáticas

VMEEA model: a comprehensive framework for the effective teaching of Mathematics

Edwin Rivera Rivera

edwin.rivera20@upr.edu

https://orcid.org/0000-0001-7710-9598

Universidad de Puerto Rico

Puerto Rico

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas enfrenta desafíos significativos en cuanto a efectividad pedagógica y logro estudiantil. Este artículo presenta el Modelo VMEEA (Vocabulario, Metodología, Explicación, Ejecución, Aplicación), un marco conceptual secuencial que integra cinco componentes esenciales para la instrucción matemática efectiva. Basado en teorías de aprendizaje cognitivo, principios de neurociencia educativa y mejores prácticas documentadas, el modelo VMEEA proporciona una estructura sistemática que facilita tanto la planificación docente como el desarrollo progresivo de la competencia matemática estudiantil. Se discuten los fundamentos teóricos de cada componente, se presentan estrategias específicas de implementación y se proponen áreas para investigación futura.

Palabras clave: enseñanza de matemáticas; modelo instruccional; competencia matemática; vocabulario matemático; pedagogía efectiva

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

ABSTRACT

Mathematics education faces significant challenges regarding pedagogical effectiveness and student achievement. This article presents the VMEEA Model (Vocabulary, Methodology, Explanation, Execution, Application), a sequential conceptual framework integrating five essential components for effective mathematics instruction. Based on cognitive learning theories, educational neuroscience principles, and documented best practices, the VMEEA model provides a systematic structure facilitating both teacher planning and progressive development of student mathematical competence. Theoretical foundations of each component are discussed, specific implementation strategies are presented, and areas for future research are proposed.

Keywords: mathematics teaching; instructional model; mathematical competence; mathematical vocabulary; effective pedagogy

Recibido: 31 diciembre 2025 | Aceptado: 15 enero 2026 | Publicado: 16 enero 2026

INTRODUCCIÓN

La enseñanza efectiva de las matemáticas constituye uno de los desafíos más significativos en los sistemas educativos contemporáneos (Boaler, 2016; Hattie, 2018). A pesar de décadas de reforma curricular e innovación pedagógica, persisten brechas sustanciales en el rendimiento matemático estudiantil, particularmente en poblaciones diversas y contextos con recursos limitados (OECD, 2019). Las evaluaciones internacionales como PISA revelan consistentemente que un porcentaje considerable de estudiantes no alcanza niveles satisfactorios de competencia matemática (Schleicher, 2019).

La literatura especializada identifica múltiples factores que contribuyen a esta problemática: preparación inadecuada de maestros, currículos desarticulados, ansiedad matemática, metodologías centradas en procedimientos sin comprensión conceptual, y desconexión entre las matemáticas escolares y sus aplicaciones auténticas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2020; Stigler & Hiebert, 2016). Investigaciones en neurociencia cognitiva revelan que el aprendizaje matemático requiere la integración de múltiples sistemas cerebrales, incluyendo procesamiento lingüístico, memoria de trabajo, razonamiento abstracto y representación espacial (Dehaene, 2020; Sousa, 2015).

Diversos marcos teóricos han intentado conceptualizar la enseñanza efectiva de matemáticas. El modelo de Van Hiele propone niveles de pensamiento geométrico (Usiskin, 2021), mientras que el marco de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball et al. (2017) enfatiza el conocimiento especializado que requieren los docentes. El NCTM (2020) ha articulado principios comprensivos que incluyen procesos matemáticos como resolución de problemas, razonamiento y comunicación. Sin embargo, persiste la necesidad de modelos instruccionales que sean simultáneamente comprehensivos, secuenciales, aplicables a diversos contenidos y niveles, y prácticamente viables para docentes en contextos reales de aula.

El presente artículo propone el Modelo VMEEA como respuesta a esta necesidad. El acrónimo VMEEA representa cinco componentes fundamentales presentados en secuencia intencional: **Vocabulario** (dominio del lenguaje matemático), **Metodología** (procedimientos y algoritmos), **Explicación** (razonamiento y justificación), **Ejecución** (práctica y fluidez), y **Aplicación** (transferencia a contextos auténticos). Este modelo sintetiza hallazgos de investigación en educación matemática, psicología cognitiva y neurociencia educativa, proporcionando un marco estructurado pero flexible para la práctica docente.

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

DESARROLLO

Marco teórico

Fundamentos Cognitivos del Aprendizaje Matemático

El aprendizaje matemático es un proceso cognitivo complejo que involucra múltiples sistemas de memoria, atención y procesamiento (Sweller et al., 2019). La teoría de carga cognitiva postula que la memoria de trabajo tiene capacidad limitada y que la instrucción efectiva debe gestionar esta limitación mediante la estructuración cuidadosa de la información (Paas & Sweller, 2021). El Modelo VMEEA responde a este principio al segmentar el aprendizaje en componentes manejables y secuenciales que construyen sobre conocimientos previos sin sobrecarga cognitiva.

Desde la neurociencia, Dehaene (2020) identifica tres circuitos cerebrales fundamentales en el procesamiento matemático: representación de cantidades en la región intraparietal bilateral, manipulación simbólica en áreas lingüísticas del hemisferio izquierdo, y visualización espacial en la red parietal posterior. El Modelo VMEEA activa sistemáticamente estos tres circuitos: Vocabulario fortalece las conexiones lingüístico-simbólicas, Metodología y Ejecución desarrollan automatización neural, y Aplicación requiere integración de representaciones múltiples (Geary, 2020).

Lenguaje y Comunicación Matemática

El vocabulario matemático constituye un registro lingüístico especializado con características únicas: alta densidad léxica, polisemia donde palabras tienen significados cotidianos y matemáticos diferentes, y estructuras sintácticas complejas (Schleppegrell, 2017). Investigaciones demuestran correlaciones significativas entre dominio del vocabulario matemático y desempeño en resolución de problemas (Powell & Driver, 2015). Estudiantes con vocabulario matemático limitado enfrentan barreras sustanciales para acceder a conceptos más complejos, independientemente de su capacidad de razonamiento cuantitativo (Riccomini et al.,

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

2015). El componente de Vocabulario en el Modelo VMEEA reconoce que el lenguaje matemático debe enseñarse explícita y sistemáticamente (Bay-Williams & Livers, 2021).

Procedimientos, Conceptos y su Interrelación

Un debate persistente en educación matemática concierne la relación entre conocimiento procedimental y conocimiento conceptual (Rittle-Johnson et al., 2015). Evidencia empírica sugiere una relación bidireccional e iterativa: la práctica procedimental puede facilitar comprensión conceptual, y la comprensión conceptual puede mejorar la ejecución procedimental (Star et al., 2015). El Modelo VMEEA integra ambas perspectivas mediante la alternancia intencional entre Metodología (procedimientos) y Explicación (conceptos), reflejando hallazgos de que la instrucción entrelazada produce mejores resultados (Fyfe et al., 2021).

El Modelo VMEEA: Componentes y Fundamentos

El Modelo VMEEA conceptualiza la enseñanza efectiva de matemáticas como progresión secuencial e interconectada a través de cinco fases esenciales. Aunque presentadas linealmente, estas fases son iterativas y pueden revisitarse cíclicamente en contextos de enseñanza más complejos.

Componente 1: Vocabulario

El primer componente se enfoca en el desarrollo sistemático del lenguaje matemático, incluyendo términos técnicos, símbolos, notación convencional y estructuras lingüísticas específicas del discurso matemático. El vocabulario matemático constituye la infraestructura semántica sobre la cual se construye todo aprendizaje matemático subsecuente (Monroe & Orme, 2017).

Las estrategias de implementación incluyen: (a) instrucción explícita con definiciones claras acompañadas de ejemplos y contraejemplos (Riccomini et al., 2015); (b) atención a la polisemia, contrastando significados matemáticos y cotidianos (Schleppegrell, 2017); (c) muros de palabras matemáticas como herramientas visuales (Bay-Williams & Livers, 2021); (d) conexiones multimodales asociando términos con representaciones visuales, manipulativos y gestos (Cook et al., 2017); y (e) enseñanza de morfología matemática incluyendo raíces, prefijos y sufijos (Powell & Driver, 2015).

Componente 2: Metodología

El segundo componente se centra en la instrucción estructurada de procedimientos, algoritmos y técnicas matemáticas específicas. Los procedimientos matemáticos representan conocimiento cultural acumulado que proporciona herramientas eficientes para resolver categorías de problemas (Rittle-Johnson & Koedinger, 2015).

El modelado explícito constituye la estrategia fundamental, donde el maestro realiza una demostración paso a paso con verbalización del pensamiento, haciendo visible el proceso cognitivo (Sweller et al., 2019). La progresión Concreto-Representacional-Abstracto (CRA) utiliza manipulativos físicos, luego diagramas, y finalmente símbolos abstractos (Witzel et al., 2019). La descomposición de algoritmos fragmenta procedimientos complejos en pasos manejables (Clark & Mayer, 2016), mientras que la práctica guiada permite ejecución con apoyo inmediato del maestro, reduciendo gradualmente el andamiaje (Fisher & Frey, 2021).

Componente 3: Explicación

El tercer componente desarrolla la capacidad estudiantil para articular razonamiento matemático, justificar procedimientos y construir argumentos válidos. La explicación trasciende la mera ejecución procedimental para abordar comprensión conceptual y razonamiento lógico (NCTM, 2020). Cuando los estudiantes explican su pensamiento, reorganizan y consolidan conocimientos, identifican lagunas en su comprensión, y desarrollan hábitos de pensamiento matemático (Webb et al., 2019).

Las estrategias incluyen: (a) preguntas de sondeo que invitan a profundizar más allá de respuestas superficiales (Kazemi & Hintz, 2020); (b) justificación de cada paso anotando la razón matemática para cada operación (Staples et al., 2017); (c) uso de múltiples representaciones para enriquecer comprensión (Lesh et al., 2015); (d) normas de discurso matemático estructurado (Chapin et al., 2021); y (e) análisis de errores como oportunidades de aprendizaje (Boaler, 2016).

Componente 4: Ejecución

El cuarto componente se dedica a la práctica estructurada, deliberada y progresiva que desarrolla fluidez procedimental, precisión y automatización apropiada de habilidades matemáticas. La automatización de procedimientos básicos libera recursos cognitivos para tareas de orden superior (Rohrer, 2015; Sweller et al., 2019).

La práctica espaciada distribuye sesiones a través del tiempo, siendo superior a la práctica masiva para fortalecer consolidación en memoria a largo plazo (Kang, 2016). La práctica intercalada alterna tipos de problemas en lugar de bloques homogéneos, mejorando discriminación y facilitando transferencia (Rohrer et al., 2015). La retroalimentación inmediata proporciona feedback correctivo enfocándose en el proceso, no solo en la respuesta final (Hattie & Timperley, 2015). Las estrategias de autoevaluación permiten que estudiantes monitoreen su propio trabajo desarrollando independencia matemática (Dignath & Büttner, 2018).

Componente 5: Aplicación

El quinto componente se enfoca en la transferencia de conocimientos a situaciones auténticas, problemas no rutinarios, conexiones interdisciplinarias y contextos del mundo real. La aplicación representa el nivel más sofisticado de comprensión matemática, requiriendo no solo recordar procedimientos sino reconocer estructuras matemáticas en contextos diversos (Boaler & Staples, 2017).

Las estrategias incluyen: (a) problemas auténticos utilizando situaciones genuinas de la vida real (Gravemeijer et al., 2017); (b) proyectos interdisciplinarios conectando matemáticas con ciencias, artes y estudios sociales (Drake & Reid, 2018); (c) problemas abiertos con múltiples soluciones válidas promoviendo creatividad y pensamiento flexible (Schoenfeld, 2016); (d) modelación matemática donde estudiantes formulan, resuelven e interpretan modelos de fenómenos reales (Blum, 2015); y (e) análisis de datos reales para investigar preguntas estadísticas significativas (Franklin et al., 2017).

Implementación Sistemática del Modelo VMEEA

Secuencialidad e Iteración

El Modelo VMEEA es fundamentalmente secuencial en que cada componente construye sobre los anteriores creando una progresión lógica de desarrollo. Sin vocabulario, los estudiantes no pueden seguir instrucciones metodológicas; sin metodología, las explicaciones carecen de sustancia; sin práctica, los procedimientos no alcanzan fluidez; sin aplicación, el aprendizaje permanece abstracto y desconectado (Gagné, 2016).

Sin embargo, el modelo es también iterativo y cíclico. Al introducir conceptos progresivamente más avanzados, se repite el ciclo VMEEA a mayor nivel de complejidad (Bruner, 2017). Dentro de una misma unidad, puede ser necesario moverse entre componentes de manera no estrictamente lineal, manteniendo flexibilidad adaptativa (Heritage, 2018).

Diferenciación por Nivel Educativo

La implementación del Modelo VMEEA debe adaptarse al nivel de desarrollo cognitivo y contexto educativo (Tomlinson, 2017). En educación elemental, hay énfasis mayor en Vocabulario, Metodología y Explicación con representaciones concretas extensivas usando manipulativos y actividades kinestésicas (Van de Walle et al., 2018). En educación secundaria, se busca balance entre los cinco componentes con creciente sofisticación, incorporando razonamiento abstracto y modelación matemática (Leinwand et al., 2020). En educación superior, el vocabulario es altamente técnico, las metodologías incluyen demostración formal

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

mediante pruebas, y la aplicación aborda problemas genuinamente complejos (Bressoud et al., 2016).

Planificación de Lecciones

Una lección típica incorporando el Modelo VMEEA estructura los cinco componentes como elementos organizadores. Una lección de cincuenta minutos podría asignar: (a) 5 minutos al Vocabulario mediante revisión e introducción de términos; (b) 10 minutos a Metodología con demostración del procedimiento; (c) 10 minutos a Explicación mediante discusión guiada sobre el razonamiento; (d) 15 minutos integrando Metodología y Explicación con práctica guiada; y (e) 10 minutos finales continuando Explicación con trabajo entre pares (Fisher & Frey, 2021). En días subsecuentes, la secuencia incrementa énfasis en Ejecución mediante práctica variada, y progresa gradualmente hacia Aplicación con problemas auténticos.

Evaluación Alineada

La evaluación debe medir competencia en cada componente del modelo (Wiliam, 2018). Una evaluación balanceada incluye: (a) ítems evaluando Vocabulario mediante definiciones y uso correcto de términos; (b) evaluación de Metodología mediante ejecución correcta mostrando todos los pasos; (c) medición de Explicación mediante justificación escrita y construcción de argumentos; (d) evaluación de Ejecución mediante fluidez y precisión en problemas variados; y (e) medición de Aplicación mediante resolución de problemas no rutinarios, proyectos de modelación y aplicaciones auténticas (NCTM, 2020). Una evaluación comprehensiva incluye representación proporcional de todos los componentes, reconociendo que competencia matemática requiere dominio en todas estas dimensiones.

Caso Ilustrativo: Teorema de Pitágoras

Para ilustrar la aplicación integrada del Modelo VMEEA, consideremos la enseñanza del Teorema de Pitágoras en nivel secundario.

Vocabulario: Se introduce y refuerza terminología esencial: teorema, triángulo rectángulo, catetos, hipotenusa, ángulo recto, y operaciones como cuadrado y raíz cuadrada. Se contrasta el uso matemático y cotidiano de términos como "cuadrado" (Monroe & Orme, 2017).

Metodología: Se presenta la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ mediante demostración visual con cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo físico, mostrando cómo las áreas de los cuadrados sobre los catetos suman el área del cuadrado sobre la hipotenusa (Witzel et al., 2019). El maestro modela paso a paso cómo resolver para un lado faltante.

Explicación: Mediante discusión guiada, los estudiantes articulan por qué funciona el teorema explorando la relación de áreas. Se utilizan preguntas de sondeo como "¿Por qué solo funciona en triángulos rectángulos?" (Kazemi & Hintz, 2020).

Ejecución: Los estudiantes practican resolviendo para lados faltantes en configuraciones variadas: (a) encontrar la hipotenusa dados ambos catetos; (b) encontrar un cateto dada la hipotenusa y el otro cateto; y (c) problemas intercalados que requieren identificar qué lado resolver (Rohrer et al., 2015). La práctica se distribuye a lo largo de varias sesiones.

Aplicación: Los estudiantes aplican el teorema a problemas auténticos: calcular distancias diagonales en diseño arquitectónico, determinar longitudes de cables de anclaje en construcción, y analizar rutas óptimas en navegación (Gravemeijer et al., 2017). Como proyecto final, diseñan una rampa de accesibilidad para la escuela, determinando longitud necesaria dados altura y distancia horizontal, integrando matemáticas con ingeniería y justicia social.

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES

Ventajas del Modelo VMEEA

El Modelo VMEEA ofrece varias ventajas para la práctica docente y el aprendizaje estudiantil. Primero, proporciona **estructura clara y secuencial** que facilita planificación instruccional mientras mantiene flexibilidad para adaptación contextual (Heritage, 2018).

DOI: https://doi.org/10.71112/jts98c87

Segundo, **integra múltiples perspectivas teóricas** sintetizando hallazgos de psicología cognitiva, neurociencia educativa y educación matemática en un marco coherente (Geary, 2020). Tercero, **aborda tanto conocimiento procedimental como conceptual**, evitando el falso dilema de priorizar uno sobre el otro (Rittle-Johnson et al., 2015). Cuarto, es **aplicable a través de diversos contenidos y niveles educativos**, desde aritmética elemental hasta matemáticas universitarias (Bressoud et al., 2016).

Limitaciones y Consideraciones

El modelo requiere **tiempo instruccional considerable** para implementar los cinco componentes adecuadamente. Maestros enfrentando presiones de cobertura curricular extensiva pueden percibir tensión entre profundidad que promueve el modelo y amplitud que requieren estándares (Schmidt & Houang, 2018). La implementación efectiva demanda **desarrollo profesional sustancial** para que maestros comprendan fundamentos teóricos y dominen estrategias específicas de cada componente (Darling-Hammond et al., 2017).

Direcciones para Investigación Futura

Se requiere investigación empírica sistemática para validar la efectividad del Modelo VMEEA. Estudios experimentales y cuasi-experimentales podrían comparar resultados de aprendizaje entre aulas implementando VMEEA versus enfoques tradicionales, midiendo no solo rendimiento en evaluaciones estandarizadas sino también comprensión conceptual profunda, capacidad de aplicación y actitudes hacia las matemáticas (Hattie, 2018). Investigación cualitativa podría explorar experiencias de maestros implementando el modelo: desafíos enfrentados, adaptaciones realizadas y percepciones sobre viabilidad práctica (Creswell & Poth, 2018). Estudios de caso detallados documentando implementación en contextos diversos proporcionarían comprensión rica de factores contextuales que facilitan u obstaculizan adopción efectiva.

Investigación neuroeducativa podría examinar correlatos neuronales de cada componente VMEEA, utilizando neuroimagen funcional para observar cómo diferentes fases del modelo activan redes cerebrales específicas, validando fundamentos neurocientíficos del marco (Dehaene, 2020).

CONCLUSIONES

El Modelo VMEEA representa una contribución potencialmente significativa a la teoría y práctica de la enseñanza de matemáticas. Al integrar cinco componentes esenciales—Vocabulario, Metodología, Explicación, Ejecución y Aplicación—en un marco secuencial pero flexible, el modelo proporciona estructura comprensiva que atiende tanto conocimiento procedimental como conceptual, tanto automatización como comprensión profunda, tanto dominio de contenido como capacidad de aplicación auténtica.

Los fundamentos teóricos del modelo se arraigan en investigación establecida sobre aprendizaje cognitivo, procesamiento neural, desarrollo del lenguaje matemático, y mejores prácticas documentadas. Su estructura secuencial respeta principios de carga cognitiva mientras que su naturaleza iterativa reconoce la construcción progresiva del conocimiento matemático.

Para que el Modelo VMEEA alcance su potencial de mejorar la enseñanza de matemáticas a escala, requiere validación empírica rigurosa, desarrollo de recursos de implementación práctica, y sistemas de desarrollo profesional que equipen a maestros con conocimiento y habilidades necesarias. Con estos apoyos, el Modelo VMEEA puede contribuir significativamente a los esfuerzos continuos para mejorar la educación matemática y cerrar brechas persistentes en logro estudiantil.

Declaración de conflicto de interés

Declaro no tener ningún conflicto de interés relacionado con esta investigación.

Declaración de contribución a la autoría

Edwin Rivera Rivera: metodología, conceptualización, redacción del borrador original, revisión y edición de la redacción

Declaración de uso de inteligencia artificial

El autor declara que utilizó la inteligencia artificial como apoyo para este artículo, y que esta herramienta no sustituyó de ninguna manera la tarea o proceso intelectual, manifiesta y reconoce que este trabajo fue producto de un trabajo intelectual propio, que no ha sido publicado en ninguna plataforma electrónica de inteligencia artificial.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H., & Bass, H. (2017). Knowing and using mathematics in teaching. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 433–456). Information Age Publishing.

Bay-Williams, J. M., & Livers, S. D. (2021). Supporting mathematical language development. *Teaching Children Mathematics, 27*(4), 236–244.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record, 110*(3), 608–645. https://doi.org/10.1177/016146810811000302

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Bruner, J. S. (2017). *Toward a theory of instruction* (Rev. ed.). Belknap Press.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2021). *Classroom discussions in math: A teacher's guide for using talk moves to support the Common Core and more* (4th ed.). Math Solutions.

Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2016). *E-learning and the science of instruction: Proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning* (4th ed.). Wiley. https://doi.org/10.1002/9781119239086

Cook, S. W., Friedman, H. S., Duggan, K. A., Cui, J., & Popescu, V. (2017). Hand gesture and mathematics learning: Lessons from an avatar. *Cognitive Science, 41*(2), 518–535. https://doi.org/10.1111/cogs.12344

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). SAGE Publications.

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Learning Policy Institute. https://doi.org/10.54300/122.311

Dehaene, S. (2020). *How we learn: Why brains learn better than any machine… for now*. Viking.

Dignath, C., & Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes. *Metacognition and Learning, 13*(2), 127–157. https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x

Drake, S. M., & Reid, J. L. (2018). Integrated curriculum as an effective way to teach 21st century capabilities. *Asia Pacific Journal of Educational Research, 1*(1), 31–50. https://doi.org/10.30777/APJER.2018.1.1.03

Fisher, D., & Frey, N. (2021). *Better learning through structured teaching: A framework for the gradual release of responsibility* (3rd ed.). ASCD.

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2017). *The statistical education of teachers*. American Statistical Association.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., & Borjas, S. (2015). Benefits of concreteness fading for children's mathematics understanding. *Learning and Instruction, 35*, 104–120. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.10.004

Gagné, R. M. (2016). *The conditions of learning and theory of instruction* (5th ed.). Wadsworth Publishing.

Geary, D. C. (2020). Cognitive foundations of mathematical development. En D. H. Schunk & J. A. Greene (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (2nd ed., pp. 391–408). Routledge.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(S1), 105–123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Hattie, J. (2018). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement* (2nd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203887332

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Heritage, M. (2018). Assessment for learning as support for student self-regulation. *Australian Educational Researcher, 45*(1), 51–63. https://doi.org/10.1007/s13384-018-0261-3

Kang, S. H. K. (2016). Spaced repetition promotes efficient and effective learning. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences, 3*(1), 12–19. https://doi.org/10.1177/2372732215624708

Kazemi, E., & Hintz, A. (2020). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions* (2nd ed.). Stenhouse Publishers.

Leinwand, S., Brahier, D., Huinker, D., Berry, R. Q., Dillon, F., Larson, M. R., Leiva, M. A., Schielack, J. F., & Smith, M. S. (2020). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all* (2nd ed.). National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., & Hurford, A. (2015). *Modeling students' mathematical modeling competencies*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8

Monroe, E. E., & Orme, M. P. (2017). *Working with words in mathematics*. Rowman & Littlefield.

National Council of Teachers of Mathematics. (2020). *Catalyzing change in early childhood and elementary mathematics: Initiating critical conversations*. NCTM.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 results (Volume I): What students know and can do*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Paas, F., & Sweller, J. (2021). Cognitive load theory: New directions and challenges. *Applied Cognitive Psychology, 34*(4), 768–779. https://doi.org/10.1002/acp.3730

Powell, S. R., & Driver, M. K. (2015). The influence of mathematics vocabulary instruction embedded within addition tutoring. *Learning Disability Quarterly, 38*(4), 221–233. https://doi.org/10.1177/0731948714564574

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics. *Reading & Writing Quarterly, 31*(3), 235–252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G., & Farran, D. C. (2017). Early math trajectories. *Child Development, 88*(5), 1727–1742. https://doi.org/10.1111/cdev.12662

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. R. (2005). Designing knowledge scaffolds. *Cognition and Instruction, 23*(3), 313–349. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2303_1

Rohrer, D. (2015). Student instruction should be distributed over long time periods. *Educational Psychology Review, 27*(4), 635–643. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9332-4

Rohrer, D., Dedrick, R. F., & Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 900–908. https://doi.org/10.1037/edu0000001

Schleicher, A. (2019). *PISA 2018: Insights and interpretations*. OECD Publishing.

Schleppegrell, M. J. (2017). *The language of schooling: A functional linguistics perspective*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315092591

Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2018). Curricular coherence and the Common Core State Standards for Mathematics. *Educational Researcher, 41*(8), 294–308. https://doi.org/10.3102/0013189X12464517

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically. *Journal of Education, 196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sousa, D. A. (2015). *How the brain learns mathematics* (2nd ed.). Corwin Press.

Star, J. R., et al. (2015). *Teaching strategies for improving algebra knowledge* (NCEE 2014-4333). National Center for Education Evaluation.

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2017). Justification as a teaching and learning practice. *Journal of Mathematical Behavior, 44*, 29–48.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and cultural routines. *ZDM Mathematics Education, 48*(4), 581–587. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 31*(2), 261–292. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09465-5

Tomlinson, C. A. (2017). *How to differentiate instruction in academically diverse classrooms* (3rd ed.). ASCD.

Usiskin, Z. (2021). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 424–432.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2018). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10th ed.). Pearson.

Webb, N. M., et al. (2019). Engaging with others' mathematical ideas. *International Journal of Educational Research, 63*, 79–93. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.02.001

Wiliam, D. (2018). *Embedded formative assessment* (2nd ed.). Solution Tree Press.

Witzel, B. S., Ferguson, C. J., & Mink, D. V. (2019). *Number sense* (2nd ed.). Corwin.